Matemática

Tema da Aula:

Potenciação: Propriedades

OBJETIVOS

- Reconhecer, calcular e aplicar as propriedades de potenciação de números reais com expoente inteiro.

Na aula anterior, relembramos a definição do que é uma potência, agora, vamos expandir o conceito para expoentes inteiros e verificarmos suas principais propriedades.

Ampliando a definição:

Dados o número real ***a*** e o número inteiro positivo ***n***, definimos a operação potenciação de base ***a*** e expoente ***n*** como sendo o número real a^n (*a* elevado a *n*), tal que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fatores}$$

O número resultante dessa operação é denominado **potência**.

Exemplos:

a) $4^4 = 4 . 4 . 4 . 4 = 256$

b) $(-4)^3 = (-4) . (-4) . (-4) = -64$

c) $(-1)^2 = (-1) . (-1) = 1$

d) $(-1)^3 = (-1) . (-1) . (-1) = -1$

e) $(-1)^{244} = (-1) . (-1) \ldots . (-1) = 1$ (pois temos uma quantidade par de sinais de "menos")

f) $(-1)^{345} = (-1) . (-1) \ldots . (-1) = -1$ (pois temos uma quantidade ímpar de sinais de "menos")

PROPRIEDADES:

Assumiremos *a* e ***b*** sendo números reais e ***m*** e ***n*** sendo números inteiros.

1) Todo número elevado ao expoente 1 é igual a ele mesmo $\boxed{a^1 = a}$

Explicação: pela definição de potência, teríamos que ter um produto de "*a*" por ele mesmo com apenas **um** fator, logo, a potência a^1 é igual a própria base ***a*.**

PREFEITURA DUQUE DE CAXIAS
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

2) Numa <u>Multiplicação de potências de mesma base:</u> repetimos a base e somamos os expoentes

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

<u>Explicação</u>: pela definição de potência, temos:

$$a^m . a^n = \underbrace{\underbrace{(a . a . \cdots . a)}_{m\ fatores} \cdot \underbrace{(a . a . \cdots . a)}_{n\ fatores}}_{m+n\ fatores} = \underbrace{(a . a . a . a \cdots . a . a)}_{m+n\ fatores}$$

$$= a^{m+n}$$

3) Numa <u>Divisão de potências de mesma base:</u> repetimos a base e subtraímos os expoentes

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

($a \neq 0$)

<u>Explicação por meio do exemplo</u>: $4 = \frac{32}{8} = \frac{2^5}{2^3}$. Pela definição de potência, temos:

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 . \cancel{2} . \cancel{2} . \cancel{2} . 2}{2 . \cancel{2} . \cancel{2}} = 2 . 2 = 4 = 2^2 = 2^{5-3}$$

Podemos generalizar da seguinte maneira: $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m+n-n}}{a^n} = \frac{\cancel{a^{n+(m-n)}}}{a^n} = \frac{a^n . a^{m-n}}{a^n} = a^{m-n}$

4) Todo número, diferente de zero, elevado ao expoente <u>zero</u> é igual a 1

$$\boxed{a^0 = 1}$$

($a \neq 0$)

<u>Explicação por meio de exemplo</u>: $1 = \frac{25}{25} = \underbrace{\frac{5^2}{5^2} = 5^{2-2}}_{pela\ propriedade\ 3} = 5^0$

Podemos generalizar da seguinte maneira: $1 = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

Obs: note que para a = 0 não conseguimos afirmar o mesmo, já que $\frac{0}{0}$ é indeterminado. Logo, 0^0 também é uma indeterminação.

5) **Para elevarmos uma potência a um expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes:**

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Explicação: $(a^m)^n = \underbrace{a^m \,.\, a^m \,. \cdots \,. a^m}_{n\ fatores} = a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\ parcelas}} = a^{m \cdot n}$

6) Todo número diferente de zero, elevado a um expoente negativo, é igual ao inverso desse número elevado ao expoente positivo:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

(*a* ≠ 0)

Explicação: $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

Obs: no caso particular do n° real ***a*** ser da forma $a = \frac{p}{q}$. Teremos: $a^{-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = \frac{q}{p}$. Portanto:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Atividades

1) Ligue as potências da coluna da esquerda com seu correspondente na coluna da direita:

$(9^7)^4$ •	• 1
9^{2^3} •	• 0
9^{3^2} •	• 9^9
9^0 •	• $(9^4)^7$
0^9 •	• 9^8

2) Vamos de Verdadeiro ou Falso? Analise as afirmativas a seguir, classificando-as com (V) para verdadeira e (F) para falsa:

a) $3^{18} + 3^{18} + 3^{18} = 3^{19}$ ( )

b) $(-5)^2 = -25$ ( )

c) $(-3)^{-2} = \frac{1}{9}$ ( )

d) $-5^2 = -25$ ( )

e) A metade de 2^{45} é 2^{44}. ( )

f) $6^0 + 6^1 = 6$ ( )

3) A lenda do surgimento do Xadrez

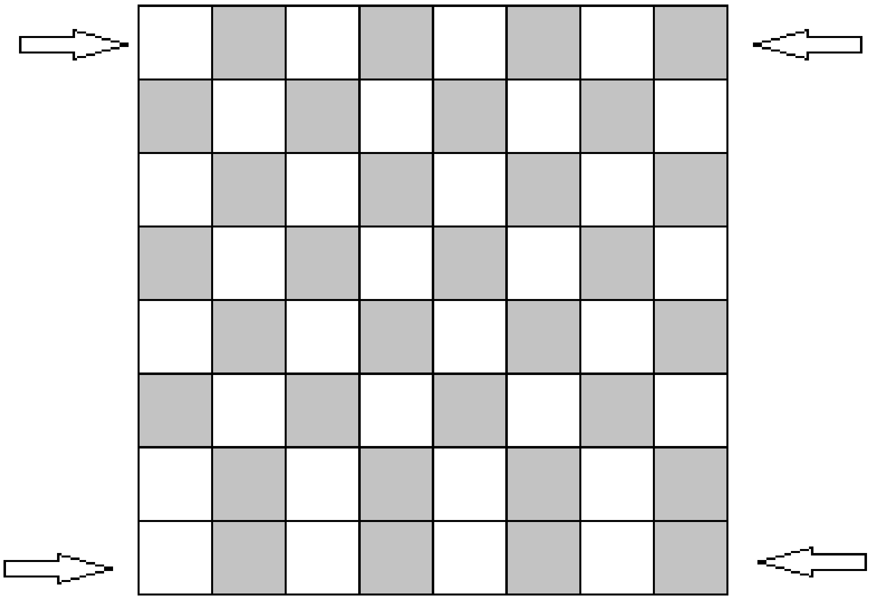
Existe uma conhecida lenda, contada pelo povo hindu, de um rei que havia perdido seu filho, o príncipe, numa sangrenta batalha. Nada conseguia alegrar o rei, até que recebeu de presente de um súdito um jogo de tabuleiro que simulava uma batalha. Esse jogo envolvia peões, cavalos, torres, bispos, rainha e rei, menos príncipes e princesas. Devido ao formato do tabuleiro, o jogo foi apelidado de xadrez.

O rei adorou o jogo e decidiu retribuir o presente, mas não sabia como. Assim, deixou que o súdito escolhesse o presente. Então, disse o súdito:

- Majestade, dê-me um grão de trigo correspondendo a primeira casa do jogo de xadrez, dois grãos correspondendo a segunda casa, quatro a terceira e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos, até a 64ª casa.

O rei ficou espantado com a simplicidade do pedido, porém mais surpreso ainda ficou quando constatou que não conseguiria satisfazê-lo, pois o número total de grãos no tabuleiro era um número imenso.

Complete cada uma das dezesseis casas, oito da primeira e oito da última fileira do tabuleiro abaixo, com um número que expresse a quantidade de grãos que corresponda a cada casa. **Dica: use potências.**



Para saber mais...

Assista os vídeos disponíveis no *Youtube*:

Isto é Matemática: (Matemático Português Rogério Martins)

https://youtu.be/GThyTefiVlY

Portal do Saber da OBMEP: (Módulo do 8° ano – Prof. Cristiano Marcell – Prefeitura de Duque de Caxias e Colégio Pedro II)

https://youtu.be/EwWuvJ1Y_mU